Приведем пример окрестностной мультиагентной системы $MNS_G = (N,\varnothing,V,Y,\varnothing,\varnothing,F,\varnothing)$, состоящей из трех узлов-агентов $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, причем узел a_1 – нейронная сеть $NS_{NN} = (N_1, \varnothing, V_1, Y_1, \varnothing, \varnothing, F_1, \varnothing)$ [1], узел a_2 – нейронная сеть $NS_{NN} = (N_2,\varnothing,V_2,Y_2,\varnothing,\varnothing,F_2,\varnothing)$, a_3 – узел-управление. Причем, $O_\nu(a_1) = \{a_1, a_3\}$, $O_\nu(a_2) = \{a_2, a_3\}$, $O_\nu(a_3) = \{a_3\}$, $O_y(a_1) = \{a_1\}$, $O_y(a_2) = \{a_2\}$ $O_y(a_3) = \{a_1, a_2, a_3\}$.

В линейном случае уравнения связи узлов-агентов окрестностной мультиагентной системы будут иметь вид:

$$w_y[1,1]Y_1 + w_\nu[1,1]V_1 + w_\nu[1,3]V_3 = 0;$$

$$w_y[2,2]Y_2 + w_\nu[2,2]V_2 + w_\nu[2,3]V_3 = 0;$$

$$w_y[3,1]Y_1 + w_y[3,2]Y_2 + w_y[3,3]Y_3 + w_\nu[3,1]V_3 = 0;$$

где $w_\nu[i,j], w_y[i,j]\ (i = 1,2,3)$, – матрицы-параметры входных и выходных воздействий, соответственно.

Таким образом, в работе дано определение и приведен пример окрестностной мультиагентной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмырин А.М., Седых И.А.*. Окрестностный подход к мультиагентным системам // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней матем. школы. Воронеж: ВГУ, 2013. С. 289.

2. *Шмырин А.М., Седых И.А.* Дискретные модели в классе окрестностных систем. Вестник Тамбовского государствкнного униыерситета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов. 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 867-871.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 11-08-97525 р-центр а).

Sedykh I.A. NEIGHBORHOOD MODELING OF MULTI-AGENT SYSTEMS

A definition and an example of the neighborhood multi-agent systems are given

Key words: neighborhood multi-agent systems.

УДК 519.852.2

О КОНУСЕ СВЯЗНЫХ ПОДГРАФОВ

© **А.В. Селиверстов**

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; полиэдральный конус; многогранник; подграф.

Дано описание ребер релаксационных многогранников для булева квадратичного программирования. Нами установлено соответствие между ребрами такого многогранника и связными подграфами полного графа.

Различные задачи для передачи информации [1, 2] и биоинформатики [3, 4] сводятся к оптимизации функционала на множестве связных подграфов данного графа. Это объясняет интерес к описанию связных подграфов, удобному для обработки данных методами линейного программирования. С другой стороны, такое описание позволяет использовать методы перечисления связных графов [5] для изучения многогранников, связанных с трудными задачами оптимизации квадратичных функционалов на множестве вершин многомерного куба [6, 7]; и оценить колмогоровскую сложность [8] таких многогранников. Близкая задача описания многогранников разбиений чисел рассмотрена в [9].

Пусть граф имеет n вершин. Рассмотрим прямую сумму пространств $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^N$, где число $N = n(n-1)/2$. Координаты в $\mathbb{R}^n$ обозначим x_i, в $\mathbb{R}^N$ обозначим x_{ij}, где $i < j$. Координаты в $\mathbb{R}^n$ соответствуют вершинам графа, в $\mathbb{R}^N$ — ребрам графа. Полиэдральный конус Λ_n размерности $n(n+1)/2$ задан системой $(3n^2 - 3n)/2$ неравенств трех типов: $x_i \geqslant x_{ij}$, $x_j \geqslant x_{ij}$ и $x_{ij} \geqslant 0$.

Точке $\mathbf{x} \in \Lambda_n$ соответствует подграф $G(\mathbf{x})$ полного графа K_n с n вершинами: если $x_i > 0$, то вершина i принадлежит $G(\mathbf{x})$; если $x_{ij} > 0$, то вершины i и j смежны в $G(\mathbf{x})$. Легко видеть корректность определения для точек из конуса $\Lambda_n:$ если ребро принадлежит подграфу, то и вершины этого ребра тоже принадлежат подграфу.

Т е о р е м а 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между связными подграфами графа K_n и крайними лучами конуса Λ_n. Более того, если точка $\mathbf{x}$ принадлежит крайнему лучу, то ее ненулевые координаты равны между собой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если подграф $G(\mathbf{x})$ несвязный, то точка $\mathbf{x}$ равна сумме точек $\mathbf{x}^{(k)} \in \Lambda_n$, для которых $G(\mathbf{x}^{(k)})$ служат компонентами связности в $G(\mathbf{x})$; при этом координата точки $\mathbf{x}^{(k)}$ равна либо соответствующей координате точки $\mathbf{x}$, либо нулю. Следовательно, $\mathbf{x}$ не порождает крайнего луча конуса Λ_n.

Итак, крайнему лучу соответствует единственный связный подграф. Покажем, что точка, принадлежащая крайнему лучу, определяется графом с точностью до умножения на число. Обозначим H компоненту связности остовного подграфа $G(\mathbf{x})$, в котором для всех индексов $i < j$ вершины i и j смежные, если $x_{ij} = \max_\ell x_\ell$. Обозначим $\mathbf{y}$ такую $\{0,1\}$-точку конуса Λ_n, у которой граф $G(\mathbf{y}) = H$. Предположим, что H — собственный подграф. Тогда для маленького положительного числа ε точка $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y} \in \Lambda_n$. При этом $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимые. Точка $\mathbf{x}$, равная сумме линейно независимых точек конуса, не принадлежит крайнему лучу конуса. Противоречие. Следовательно, $G(\mathbf{x}) = H$. Это возможно только если ненулевые координаты $\mathbf{x}$ равны между собой.

Если ненулевые координаты точки $\mathbf{x} \in \Lambda_n$ равны между собой и граф $G(\mathbf{x})$ связный, то точка $\mathbf{x}$ принадлежит крайнему лучу конуса Λ_n. Теорема доказана.

Для $n \leqslant 15$ числа связных подграфов графа K_n приведены в последовательности A167939 Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей http://oeis.org.

Для графа H с n вершинами все точки $\mathbf{x} \in \Lambda_n$, для которых граф $G(\mathbf{x}) \subseteq H$, составляют грань конуса Λ_n. Это позволяет рассматривать подграфы произвольного графа.

Теорема 1 позволяет описать ребра релаксационного многогранника L_n для задачи булева квадратичного программирования [10]. Этот многогранник имеет $(2n^2 - 2n)$ фасет и получается из конуса Λ_n добавлением новых неравенств вида $x_i + x_j - x_{ij} \leqslant 1$.

Т е о р е м а 2. *Любые две целые вершины многогранника L_n соединены ребром.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группа симметрий n-мерного куба вкладывается в группу автоморфизмов решетки граней L_n и транзитивно действует на множестве целых вершин L_n. Поэтому достаточно показать, что начало координат соединено ребрами с каждой целой вершиной. Эти ребра соответствуют крайним лучам конуса Λ_n, а по Теореме 1 — связным подграфам K_n. Поскольку целые точки многогранника L_n соответствуют кликам, они соединены ребрами друг с другом. Теорема доказана.

Вершины многогранника L_n — это $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точки. Вычисления программой lrs 4.2c, реализующей алгоритм из [11], показали, что при $n \leqslant 6$ все $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точки в L_n являются либо вершинами, либо серединами ребер, соединяющих целые вершины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерзин А.И., Плотников Р.В., Шамардин Ю.В.* О некоторых полиномиально разрешимых случаях и приближенных алгоритмах для задачи построения оптимального коммуникационного дерева // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск, 2013. Т. 20. № 1. С. 12-27.

2. *Салий Я.В., Ченцов А.Г.* Об одной маршрутной задаче на узкие места с внутренними работами // Вестник Тамбовского Университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17 Вып. 3. С. 827-847.

3. *Горбунов К.Ю., Любецкий В.А.* Дерево, ближайшее в среднем к данному набору деревьев // Проблемы передачи информации. М. 2011. Т. 47. № 3. С. 64-79.

4. *Conrad J.M., Gomes C.P., van Hoeve W.-J., Sabharwal A., Suter J.F.* Wildlife corridors as a connected subgraph problem // Journal of Environmental Economics and Management. Elsevier, 2012. V. 63. № 1. P. 1-18.

5. *Воблый В.А.* Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск, 2012. Т. 19. № 4. С. 48-59.

6. *Селиверстов А.В.* Замечания о расположениях точек на квадриках // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2012. Т. 19. № 4. С. 72-77.

7. *Wang Y., Lü Z., Glover F., Hao J.-K.* Path relinking for unconstrained binary quadratic programming // European journal of operational research. Elsevier, 2012. V. 223. № 3. P. 595–604.

8. *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. М. 1965. Т. 1. № 1. С. 3-11.

9. *Шлык В.А.* О связи вершин политопов разбиений чисел с нетривиальными фасетами // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. Минск, 2010. № 1. С. 153-156.

10. *Padberg M.* The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. Springer, 1989. V. 45. № 1–3. P. 139-172.

11. *Avis D., Fukuda K.* A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra // Discrete and computational geometry. Springer, 1992. V. 8. № 1. P. 295-313.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа частично поддержана грантом Минобрнауки РФ 8481.

Seliverstov A.V. ON CONNECTED SUBGRAPH CONE

The edges of the linear relaxation polytopes for quadratic Boolean programming problems are described. We found a correspondence between the edges of such polytope and connected subgraphs of the complete graph.

Key words: combinatorial optimization; polyhedral cone; polytope; subgraph.

УДК 517.977

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ЛГФДСП)

© **П.М. Симонов**

Ключевые слова: гибридные системы; устойчивость.

Предложено решение задачи об устойчивости ЛГФДСП.

Исследованию по устойчивости решений ЛГФДСП посвящено сравнительно мало работ [1]. Запишем абстрактную ЛГФДСП в виде

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \qquad \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta x - F_{21}x - F_{22}y = g. \tag{1}$$